Architektur, Gestaltun
und Bauingenieurwes

Konstruiert?

Konstruieren mit Zirkel und Lineal

carte blanche
24 a

Seit einigen Jahren führen wir, das heisst Martin Huber und Karl Weber im Studiengang Mathematik für Architekten an der Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften ZHAW in Winterthur, die Schlussprüfungen in Gestalt von Vorträgen durch. Die Studierenden wählen jeweis ein relevantes Thema, bearbeiten es mit unserer Hilfe und tragen dann an der Prüfung vor. Die Themen bewegen sich dabei von eigentlich mathematischen Fragen bis hin zur Anwendung mathematischer Werkzeuge auf Fragen des Gestaltens. Erfahrungsgemäss ist es oft diese letzte Arbeit im Fach Mathematik, welche den Studierenden die Augen öffnet für die Beziehungen zwischen den Disziplinen.

Im Sommer 2012 zeichneten sich einige Vorträge durch eine besonders sorgfältige Bearbeitung und Präsentation aus. Man erlebt es nicht alle Tage, dass Studierende sich bereit erklären, Probleme anzupacken wie zum Beispiel die Frage der geometrischen Konstruierbarkeit, die sich doch recht weit ausserhalb des Üblichen bewegen. Man muss sich immer bewusst sein, dass es ja um eine Prüfung ging und am Schluss die Bewertung steht. Wenn dann noch die Vorträge mit einer bemerkenswerten Souveränität dargeboten werden, dann kann schon der Wunsch entstehen, es nicht einfach dabei zu belassen. Als uns dann Stephan Mäder, der Vorsteher des Departements A der ZHAW die Möglichkeit offerierte, in der Schriftenreihe Carte Blanche einige Vorträge zu präsentieren, fiel der Entschluss sehr leicht. Für sein Angebot sei ihm herzlich gedankt. Die Studierenden waren bereit, sich nocheinmal mit dem Thema zu beschäftigen, wofür auch ihnen unser Dank gebührt.

Die ersten fünf Vorträge sind alle der mathematischen Theorie des geometrischen Konstruierens gewidmet. Sie bauen aufeinander auf und geben damit einen schönen Einblick in die Thematik.

Karl Weber undt Martin Huber
Winterthur, Juli 2013

Konstruiert ?

Konstruieren mit Zirkel und Lineal

Inhaltsverzeichnis

Fünf Vorträge zum Thema
Gehalten anlässlich der Schlussprüfung 2012 , im Fach Mathematik für Architekten an der Fachhochschule für Angewandte Wissenschaften in Winterthur

S. 7 Eine geometrische Konstruktion.
Prüfungsvortrag von Sandra Metzger

S. 15 Was heisst Konstruieren?
Prüfungsvortrag von Maya Hofer

S. 21 Nicht konstruierbare Probleme.
Prüfungsvortrag von Nadine Ammann

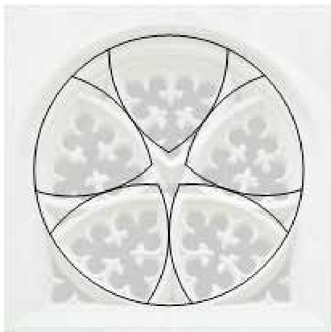
S. 28 Konstruktion des regulären Siebzehnecks.
Prüfungsvortrag von Isabel Rüttimann

S. 35 Näherungskonstruktionen.
Prüfungsvortrag von Helen Büchi

Das Masswerk von Hauterive
Beispiel einer Konstruktion

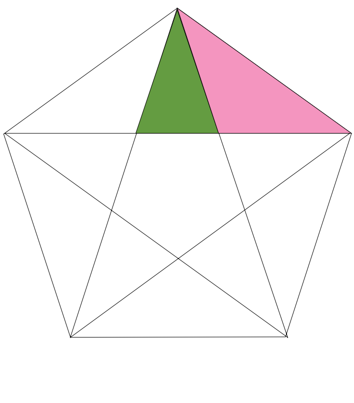
Das Kloster von Hauterive gehört zum Orden der Zisterzienser-Mönche und wurde 1138 in Freiburg von Wilhelm von Glâne gegründet. Vor allem die einheitliche Thematik der 12 Rundbogenfenster des Kreuzgangs hebt hervor. Sie sind nicht nur mit geometrischen Mitteln gestaltet, wie alle gotischen Masswerkfenster, sondern haben selbst bemerkenswerte geometrische Konstruktionen zum Gegenstand. In den einzelnen Fenstern sind die geometrischen Lehrsätze aus dem vierten Buch der Elemente Euklids, welches sich mit den regelmässigen Einteilungen des Kreises befasst, im Masswerk dargestellt. Im folgenden interessiert das Masswerk Nr. 4.

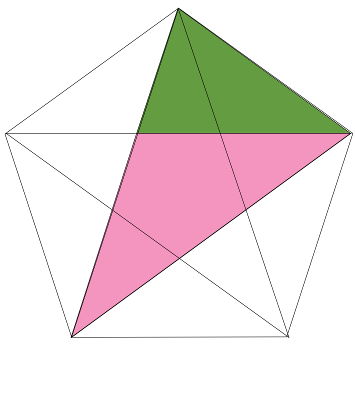
Das Kloster von Hauterive



Masswerk Nr. 4

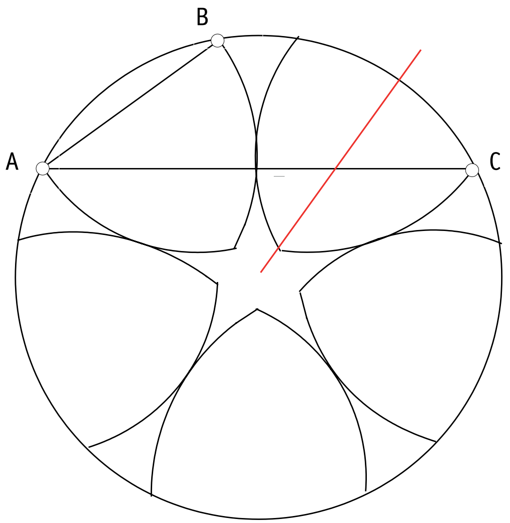
Um dieses Masswerk Nr. 4 zu konstruieren, wird zuerst die Figur in ihren geometrischen Eigenschaften analysiert. Auf dieser Analyse basierend wird dann eine Konstruktion beschrieben. Grundlegend für die Konstruktion sind goldene Dreiecke. Das sind gleichschenklige Dreiecke, deren Schenkel sich zur Basis im goldenen Schnitt verhalten oder umgekehrt. Die markierten Flächen in folgenden Figuren zeigen spitzwinklige und stumpfwinklige goldene Dreiecke im regulären Fünfeck.





Das Problem

Gegeben ist folgende Figur, zu welcher wir eine Konstruktion finden sollen. In dieser Form ist das Problem vielzu allgemein gestellt. Es gibt unendlich viele solche Figuren. Wenn wir also eine sinnvolle Problemstellung formulieren wollen, dann müssen wir viel genauer sagen, was wir eigentlich wollen.



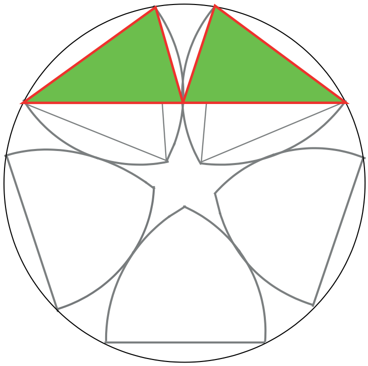
Schauen wir uns die Figur genauer an, dann sehen wir fünf symmetrisch in einen Kreis eingebettete dreiecksartige Figuren, die sich gegenseitig berühren und selbst wieder eine Symmetrieachse besitzen. Eine sinnvolle Forderung ist sicher die, dass es sich bei diesen Figuren um kongruente **Kreisbogendreiecke** handeln soll. Damit ist die Aufgabe bereits etwas geklärt, aber ohne weitere Forderungen an diese Dreiecke keineswegs bereits vollständig charakterisiert. Wir stellen die weitere Forderung, dass A und B die Zentren sind für die gegenüberliegenden Kreisbogen. Das führt dann dazu, dass sich die Kreisbogen auf Sehnen AC berühren und eine solche Sehne gleich der doppelten Sehne AB ist.

Damit ist das Probme nun formulierbar.

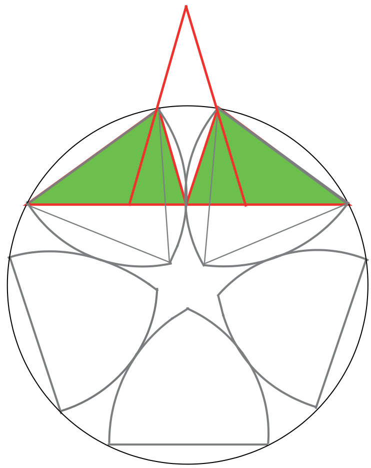
Gesucht werden fünf in den Umkreis eingebettete kongruente gleichschenklige Kreisbogendreiecke, die sich gegenseitig berühren und den oben formulierten Bedingungen genügen.

Die Analyse der Figur

Um einen Konstruktionsweg zu finden, ist zuerst die Figur eingehender zu analysieren. Diese Analyse erfolgt anhand folgender Figuren.

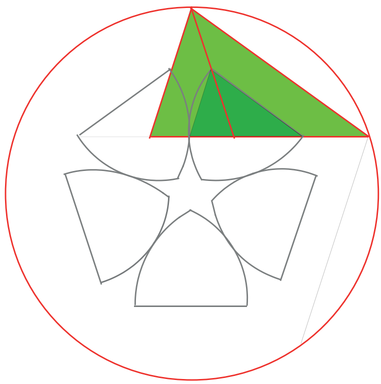


Figur 1



Figur 2

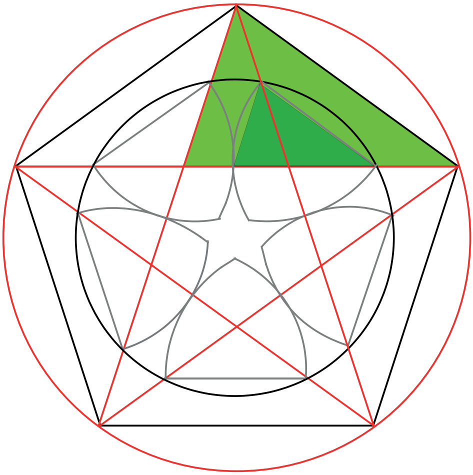
Die in Figur 1 gezeichneten grünen Dreiecke sind aufgrund der Forderungen an die Kreisbogendreiecke gleichschenklig. Aus den Symmetrieforderungen und der daraus resultierenden Fünfeckssymmetrie wächst die Überzeugung, dass es sich um goldene Dreiecke handeln muss. Auf der Basis dieser beiden Dreiecke werden in Figur 2 weitere Dreiecke (rot) sichtbar.
Figur 3 zeigt, wie daraus ein drittes spitzwinkliges Dreieck konstruierbar wird, dessen Seiten zu denen des Ausgangsdreiecks in Figur 1 im Verhältnis 2 : 1 stehen. Siehe dazu auch Figur 5



Figur 3

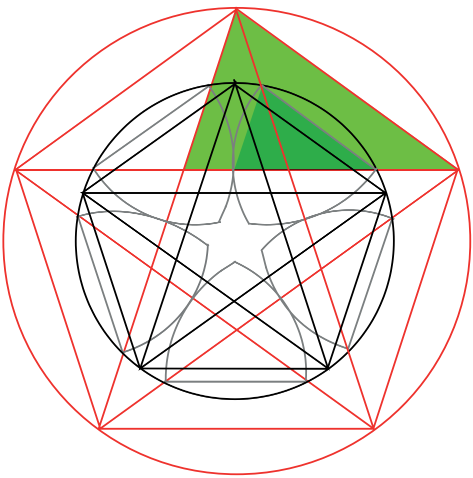
Durch Spiegelung dieses Dreiecks an der Vertikalen durch das Kreiszentrum erhalten wir ein stumpfwinkliges Dreieck, dessen Schenkel in seinem Umkreis Fünfecksseiten sind. Die Schenkel des grünen Dreiecks in Figur 3 sind also gleich der Fünfecksseite bezüglich des roten Umkreises. Damit bestätigt sich, dass es sich bei allen Dreiecken um goldene Dreiecke handelt.

Das daraus resultierende Fünfeck und das zugehörige Pentagramm sind in Figur 4 in den Umkreis eingezeichnet.



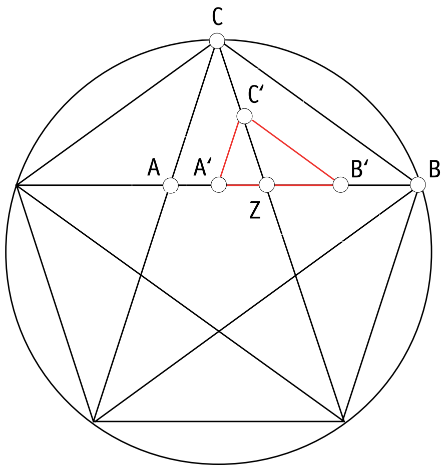
Figur 4

Damit entsteht schliesslich Figur 5, welche die Ausgangsfigur auf der Basis verschiedener Ähnlichkeiten mit dem Umkreis und dem darin eingebetteten Fünfeck und Pentagramm verbindet. Sie ist es, welche zur Idee der Konstruktion führt.



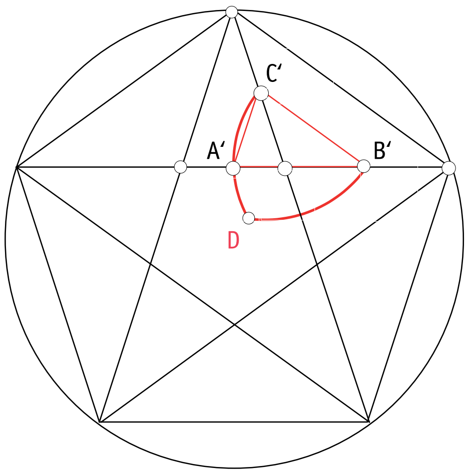
Figur 5

Die Konstruktion erfolgt gewissermassen von aussen nach innen. Sie beginnt mit dem Umkreis, in den das Fünfeck und das Pentagramm eingebettet ist. Damit ist Dreieck ABC gegeben. A'B'C' geht durch zentrische Streckung mit Faktor ½ am ebenfalls gegebenen Zentrum Z aus ABC hervor. (Figur 6)



Figur 6

Die Kreisbögen, welche das zur Sehne B'C' gehörige Kreisbogendreieck aufbauen, können damit gemäss der zu Beginn formulierten Forderungen konstruiert werden. (Figur 7)



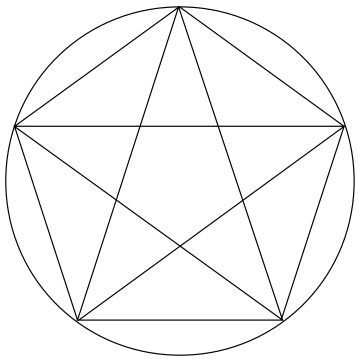
Figur 7

Damit ist auch der Streckungsfaktor bestimmt, welcher die innere Ausgangsfigur mit der äussenen Figur in Beziehung setzt. (Figur 9)

Die Konstruktion

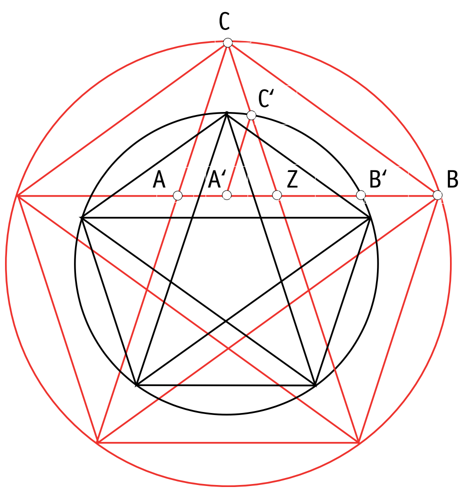
Aufgrund der Analyse kann nun folgende Konstruktion beschrieben werden.

Schritt 1
Im Ausgangskreis wird das reguläre Fünfeck zusammen mit dem Pentagramm eingezeichnet. (Figur 8)



Figur 8

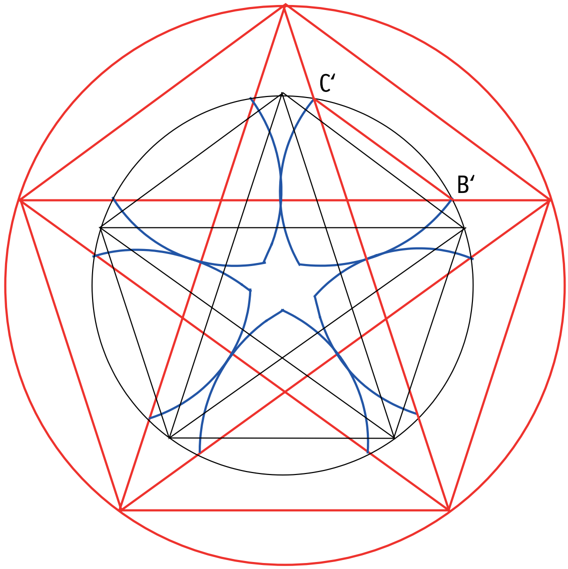
Schritt 2
Zum Ausgangskreis wird ein konzentrischer Kreis konstruiert, dessen Radius zu dem des Ausgangskreises in dem sich aus der Analyse ergebenden Verhältnis steht. Das ebenfalls mit diesem Faktor gestreckte Fünfeck und Pentagramm definieren dann das goldene Dreieck ABC von Figur 6 und Figur 9.



Figur 9

Durch die Streckung von Z aus mit Faktor ½ ergibt sich aus ABC das Dreieck A'B'C', welches der Konstruktion der Kreisbogendreiecke zugrundeliegt.

Schliesslich sind noch diese Kreisbogen zu konstruieren gemäss den zu Beginn gestellten Forderungen.



Sandra Metzger

Die klare Formulierung der Aufgabe liess im Beispiel ein lösbares Problem entstehen. Wir sind uns daran gewöhnt, dass gut gestellte geometrische Konstruktionsaufgaben bei genügendem Wissen auch gelöst werden können. Wird aber diese Überzeugung in Frage gestellt, dann merken wir sehr schnell, dass wir sie gar nicht begründen können. Nicht zuletzt deshalb, weil uns plötzlich gar nicht so klar ist, was eigentlich eine geometrische Konstruktion ist.

Einer Konstruktion liegen stets gewisse Werkzeuge zugrunde, zum Beispiel Zirkel und Lineal. Mit ihnen werden nach vorgegebenen Regeln Figuren gezeichnet. Die Konstruktion erhält damit ganz klar die Bedeutung eines Experimentes. Jede Figur, die wir konstruieren können, sagt etwas über unseren geometrische Raum aus. Die Alten haben auf diese Weise die Welt erkundet und als Resultat deren geometrische Zusammenhänge gefunden.

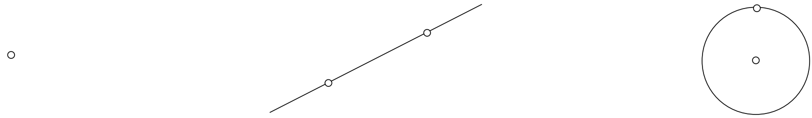
Wie jede experimentelle Annäherung an die Realität ist auch das Konstruieren mit einer Unschärfe behaftet. Sie setzt der Analyse unserer Welt Grenzen. Obwohl Konstruieren nach klaren Regeln verläuft, kann nicht in einem mathematisch strengen Sinne entschieden werden, ob die resultierende Figur gestellte Forderungen wirklich erfüllt oder nicht. So wird im Vortrag über die Näherungskonstruktionen ein Siebeneck konstruiert, welches durch Nachmessen ohne Zögern als regulär erkannt wird, obwohl ein solches gar nicht konstruierbar ist. Wie aber können wir denn das wissen? Das Problem ist, dass wir nun plötzlich über über ein ganz anderes Konstruieren sprechen.

Konstruktive Geometrie mit konkreten Werkzeugen ist keine mathematische Disziplin. Experimentieren ist nie beweisen, sondern höchstens plausibel machen. Konstruktive Geometrie kann aber in die Mathematik eingebettet werden. Den geometrischen Objekten und Beziehungen entsprechen dann mathematische, es entsteht ein mathematisches Modell der Geometrie und auf das Modell ist der mathematische Apparat anwendbar. Konstruieren wird so zum mathematischen Operieren. Nun kann man beweisen, dass ein reguläres Siebeneck nicht konstruierbar ist. Man hüte sich aber davor, zu meinen, man hätte damit etwas über das Experiment bewiesen. Dieses ist nur Brücke zwischen der Realität und der mathematischen Theorie.

Wozu dann aber das Ganze? Die mathematische Beschreibung lässt die Erscheinungen unserer Welt klarer und transparenter werden. Sie lässt erst die adäquaten Begriffe entstehen und ist Voraussetzung eines Verstehens. Die Unschärfen aber, welche jeder Beobachtung der Natur eigen sind, lassen eine exakte Übertragung nie zu. Man unterscheide also im folgenden, ob man im Sinne eines Experimentes operiert oder mittels der mathematischen Sprache eine Theorie der entstehenden Figuren erstellt.

Konstruieren mit Zirkel und Lineal

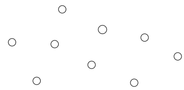
Was heisst Konstruieren ?



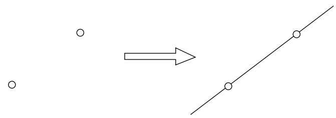
Der Punkt, die Gerade und der Kreis
sind **die Zeichen** der Sprache des geometrischen Konstruierens. Diese Sprache liegt dem Konstruieren mit Zirkel und Lineal zugrunde.

Die Syntax dieser Sprache, also das System ihrer Regeln, legt fest, in welcher Art und Weise die erwähnten Wertkzeuge Zirkel und Lineal angewendet werden dürfen, um aus einer gegebenen Figur eine neue zu erstellen.
Dadurch entstehen zulässige Figuren und Texte. Die Regeln sind:

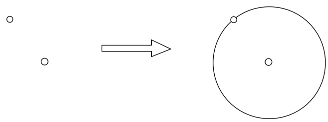
K1 beliebig endliche Menge von Punkten
→ zulässiger Text



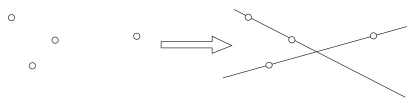
K2 enthält zulässiger Text zwei Punkte, verbinden mittels einer Gerade (die Gerade ist eindeutig bestimmt)
→ zulässiger Text



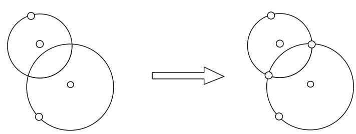
K3 enthält zulässiger Text zwei Punkte, zeichnen eines Kreises mit Punkten als Peripheriepunkt und Zentrum
→ zulässiger Text



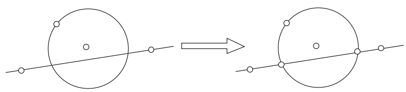
K4 enthält zulässiger Text zwei sich schneidende Geraden, zufügen eines Schnittpunktes
→ zulässiger Text



K5 enthält zulässiger Text zwei Kreise, zufügen der Schnittpunkte
→ zulässiger Text



K6 enthält zulässiger Text ein Kreis und eine Gerade, zufügen der Schnittpunkte
→ zulässiger Text

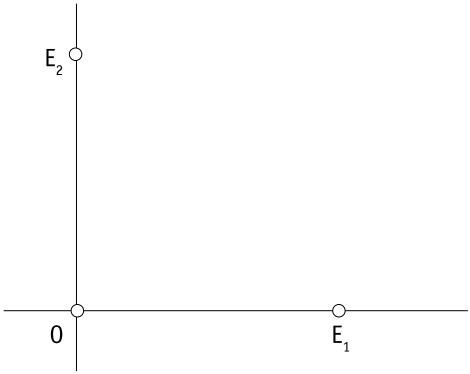


Durch Anwendung dieser 6 Regeln geschriebene Texte nennt man **geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.**

Diese Sprache besitzt jedoch keine Beweismöglichkeit. Um eine Theorie der geometrischen Konstruktionen zu erhalten, muss sie in die Sprache der Mathematik übersetzt werden.

Die Übersetzung in die mathematische Sprache

Als Grundlage nehmen wir das kartesische Koordinaten System



$0\ (0,0)\ |\ E_1\ (1,0)\ |\ E_2\ (0,1)$
$e = 0E_1$ Einheitsstrecke

Die Zuordnung der geometrischen Symbole zu Objekten der Mathematik erfolgt gemäss folgenden Regeln.

Punkt → Zahlenpaar (x,y)
Gerade → lineare Gleichung $ax + by + c = 0$
Kreis → quadratische Gleichung $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Einer Gerade durch zwei Punkte $P(a_1, b_1)$ und $Q(a_2, b_2)$ entspricht die Gleichung

$$(y-b_1)\cdot(a_2-a_1) - (x-a_1)\cdot(b_2-b_1) = 0$$

Einem Kreis mit Zentrum $P(a_1, b_1)$ und Peripheriepunkt $Q(a_2, b_2)$ entspricht

$$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = (a_2-a_1)^2 + (b_2-b_1)^2$$

Geometrisches Konstruieren bedeutet im mathematischen Modell

1. Das schrittweise Aufstellen von Geraden- und Kreisgleichungen.
2. Das Lösen der entstandenen Gleichungssysteme um neue Punkte zu bekommen.
   Dadurch entsteht letztlich eine Folge von Punkten, die durch ihre Koordinaten bestimmt sind.

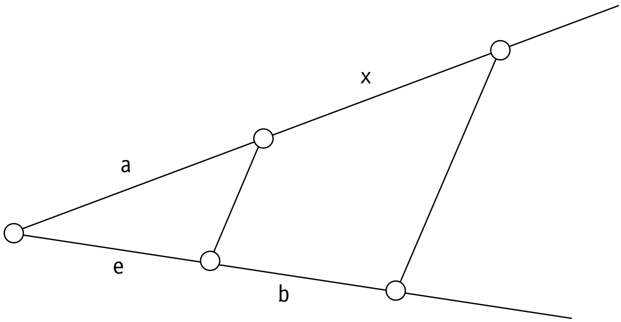
Zusammengefasst

Ein Punkt (a,b) heisst konstruierbar, wenn er durch endlich viele Schritte der besprochenen Art als Schnittpunkt erhalten wird, also als Lösung von Gleichungssystemen.
Eine Zahl heisst konstruierbar, wenn Sie Koordinate eines konstruierbaren Punktes ist. Demnach ist eine Zahl genau dann konstruierbar wenn eine Strecke konstruierbar ist, deren Länge gleich dem Betrag dieser Zahl ist.

Die Menge der konstruierbaren Zahlen bildet einen Zahlkörper, also eine Menge von Zahlen, die gegenüber Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division abgeschlossen ist. Das kann man sich folgendermassen überlegen.

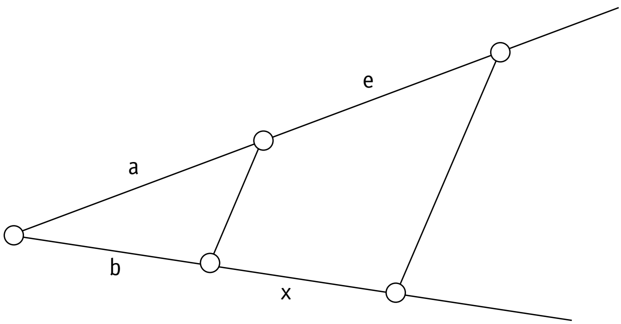
· Die Möglichkeit der Addition und Subtraktion zweier Zahlen a und b ist trivial

· Die Multiplikation von a und b erfolgt mittels des ersten Strahlensatzes



$a : e = x : b$
$x = ab$

· Die Division von a durch b erfolgt auf demselben Weg



$x : e = b : a$
$x = b/a$

Die Menge der konstruierbaren Zahlen bilden damit wirklich einen Zahlkörper. Da die Zahl 1 vorgegeben ist und konstruierbar ist, sind alle ganzen Zahlen konstruierbar und damit mindestens alle rationalen Zahlen als Quotienten ganzer Zahlen. Sie bilden den Zahlenkörper Q.

Was für Zahlen sind nun konstruierbar?

Ist K ein Körper aus konstruierbaren Zahlen, dann können aus Punktepaaren über diesem Körper Geraden (lineare Gleichungen) und Kreise (quadratische Gleichung) konstruiert werden, alle mit Koeffizienten aus K. Dabei ergibt sich

die Gerade durch zwei Punkte $P(a_1, b_1)$ und $Q(a_2, b_2)$ gemäss

$(y-b_1)\cdot(a_2-a_1) - (x-a_1)\cdot(b_2-b_1) = 0$

der Kreis mit Zentrum $P(a_1, b_1)$ und Peripheriepunkt $Q(a_2, b_2)$ gemäss

$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = (a_2-a_1)^2 + (b_2-b_1)^2$

Die Koeffizienten dieser Objekte liegen alle in K. Neue Punkte entstehen durch das Lösen der Gleichungssysteme. Dabei bestehen folgende Möglichkeiten:

Schnitt Gerade - Gerade: Die Lösungen einer linearen Gleichung liegen in K, da sie durch rationale Operationen dargestellt werden können.

Schnitt Gerade - Kreis: ergibt eine quadratische Gleichung $x^2+px+q=0$ (mit Koeffizienten p, q in K). Ihre Lösungen sind

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Lösungen quadratischer Gleichngen können komplex sein. Da wir uns jedoch nur für den Fall interessieren, in welchem sich wirklich Schnittpunkte ergeben, sind die Lösungen sicher reell. Es können damit, über K hinaus, nur neue Zahlen entstehen wenn die Wurzel aus der Determinante $p^2 - 4q$ nicht in K liegt.

Eine Wurzelbildung kann durchaus aus K hinausführen. So ist zum Beispiel die Wurzel aus 2 nicht rational. Wäre nämlich diese Wurzel rational, dann könnte man sie als vollständig gekürzten Bruch darstellen,

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

womit sich $2q^2 = p^2$ ergäbe. Dann aber wäre p durch 2 teilbar, $p = 2r$ und somit

$$q^2 = 2r^2$$

womit auch q durch 2 teilbar wäre. im Widerspruch dazu, dass der Bruch gekürzt ist.

Damit ergibt sich folgende Beschreibung der konstruierbaren Zahlen

Alle rationalen Zahlen sind konstruierbar. Wir setzen $K_0 = Q$

Entsteht durch Konstruieren eine Zahl der Form $a + b\sqrt{c}$
mit a, b und c in K_0, jedoch der Wurzel nicht in K_0, dann bildet man die Menge K_1 aller solchen Zahlen mit fest gewähltem c. Dadurch ensteht ein neuer Körper K_1.

Entsteht durch Konstruieren eine Zahl der Form $a + b\sqrt{c}$
mit a, b und c in K_1, jedoch der Wurzel nicht in K_1, dann bildet man die Menge K_2 aller solchen Zahlen mit fest gewähltem c. Dadurch ensteht ein neuer Körper K_2

Allgemein: Entsteht durch Konstruieren eine Zahl der Form $a + b\sqrt{c}$
mit a, b und c in K_n, jedoch der Wurzel nicht in K_n, dann bildet man die Menge K_{n+1} aller solchen Zahlen mit fest gehaltenem c. Dadurch ensteht ein neuer Körper K_{n+1}. Mit jedem Schritt erfolgt eine sogenannte Körpererweiterung, indem zum bereits konstruierten Körper K_n eine Wurzel adjungiert und dabei der Erweiterungskörper K_{n+1} gebildet wird.

Die Adjungierung der Wurzel aus c zu einem Körper K besteht also darin, alle Zahlen der Form $a + b\sqrt{c}$ mit a und b aus K zu bilden, bei festgehaltenem c. Die folgenden Beziehungen zeigen, dass dadurch wieder ein Körper entsteht, der **Erweiterungskörper**.

$$(a_1 + b_1\sqrt{c}) + (a_2 + b_2\sqrt{c}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{c} \qquad \rightarrow \text{addieren}$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{c}) - (a_2 + b_2\sqrt{c}) = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)\sqrt{c} \qquad \rightarrow \text{subtrahieren}$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{c})(a_2 + b_2\sqrt{c}) = (a_1 a_2 + b_1 b_2 c) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\sqrt{c} \qquad \rightarrow \text{multiplizieren}$$

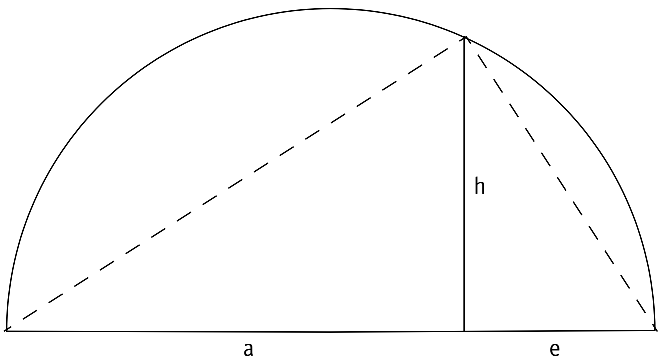
$$\frac{a_1 + b_1\sqrt{c}}{a_2 + b_2\sqrt{c}} = \frac{(a_1 + b_1\sqrt{c})(a_2 - b_2\sqrt{c})}{a_2^2 - b_2^2 c} \qquad (a_2 + b_2\sqrt{c} \neq 0) \qquad \rightarrow \text{dividieren}$$

Das Resultat

Eine Zahl a ist genau dann konstruierbar wenn eine Folge $K_0 = Q, K_1, K_2 \ldots K_n$ von Zahlenkörpern existiert, so dass für alle Indizes k = 1,2,3..n der Körper K_k durch Adjunktion der Wurzel einer Zahl c aus K_{k-1} entsteht und a in K_n liegt.

Zum Schluss noch dies

Die Quadratwurzel jeder konstruierbaren positiven Zahl a ist stets konstruierbar. Dies ergibt sich aus dem Höhensatz.



In der Figur gilt: $h^2 = ae = a$ und damit $h = \sqrt{a}$

Maya Hofer

Konstruieren mit Zirkel und Lineal
Nicht konstruierbare Objekte

Wir haben im Anschluss an die Betrachtungen zuvor das Problem, dass wir nicht alle Zahlen mit dem Zirkel und Lineal genau konstruieren können. Nun wollen wir Beispiele für nicht konstruierbare Probleme betrachten.

Wir wiederholen:
Eine Zahl a ist genau dann konstruierbar, wenn eine Folge $K_0 = Q$, K_1, K_2 ... K_n von Zahlkörpern existiert, so dass für alle Indizes m = 1,2..n der Körper K_m aus K_{m-1} durch Adjungierung einer Wurzel einer Zahl aus K_{m-1} entsteht, wobei diese Wurzel nicht in K_{m-1} liegt.

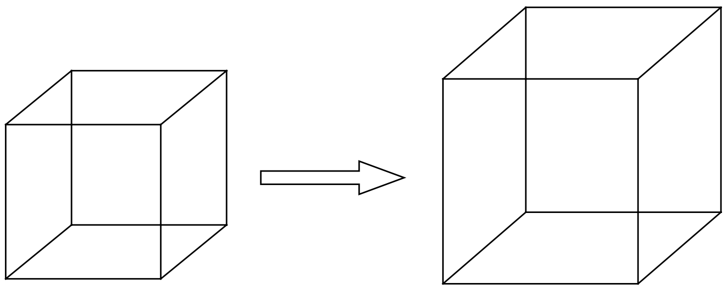
Wollen wir also zeigen, dass eine Zahl nicht konstruierbar ist, dann müssen wir beweisen, dass sie nicht in einer solchen Folge von Körpererweiterungen liegen kann.

In den nachfolgenden Beispielen kann man die Idee eines solchen Beweises sehen.

Beispiel 1: Würfelverdoppelung

Wir haben einen Würfel mit der Kantenlänge a und möchten einen Würfel konstruieren mit dem doppelten Volumen. Ist in diesem Fall x = pa die neue Kantenlänge des Würfels, dann ist $2a^3 = p^3a^3$. Lösung dieser Gleichung ist

$$p = \sqrt[3]{2}$$



Ich behaupte nun, dass man $\sqrt[3]{2}$ nicht konstruieren kann. Gemäss den bisherigen Überlegungen muss man also beweisen, dass die Zahl $\sqrt[3]{2}$ nicht in einer Folge $K_0 = Q$, K_1, K_2 ... K_n von Erweiterungskörpern liegt.

Beweis:
Wir nehmen an, dass es eine Konstruktion für $\sqrt[3]{2}$ gibt. Somit gäbe es auch eine entsprechende Folge $K_0 = Q$, K_1, K_2 ... K_n. Unter all den möglichen Konstruktionswegen nehmen wir an, dass n die kleinste mögliche Weglänge ist. Sicher ist, dass n > 1, denn die dritte Wurzel

aus 2 ist nicht rational. Das zeigt man analog wie die Nichtrationalität der Quadratwurzel. Dann ist also

$$\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{c}$$

mit a, b und c in K_{n-1}, aber der Wurzel aus c nicht in K_{n-1}. Potenzieren wir die Gleichung:

$$2 = a^3 + 3ab^2c + (3a^2b + b^3c)\sqrt{c}$$

Wäre $3a^2b + b^3c$ nicht gleich Null, dann könnten wir umformen zu

$$\sqrt{c} = \frac{2 - (a^3 + 3ab^2c)}{3a^2b + b^3c}$$

Somit würde $\sqrt{c}$ in K_{n-1} liegen, was nicht sein kann. $3a^2b + b^3c$ muss also gleich 0 sein. Dann aber ist auch $(3a^2b + b^3c)\sqrt{c} = 0$ und es folgt

$$2 = a^3 + 3ab^2c - (3a^2b + b^3c)\sqrt{c} = (a - b\sqrt{c})^3$$

Damit ergeben sich für $\sqrt[3]{2}$ zwei Werte

$$a + b\sqrt{c} \qquad und \qquad a - b\sqrt{c}$$

Somit hätte die Zahl 2 verschiedene reelle dritte Wurzeln, was nicht der Fall sein kann. Damit ist die Annahme auf einen Widerspruch geführt und die Würfelverdoppelung konstruktiv nicht lösbar.

Um weitere Beispiele von nicht konstruierbaren Zahlen zu besprechen, brauchen wir den **Satz von Vieta**. Wir benötigen hier diesen Satz nur für kubische Gleichungen

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

Er besagt: Sind x_1, x_2, x_3 die drei Lösungen, dann gilt

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q$$

und $\quad x_1\, x_2\, x_3 = -r$

Entscheidend ist nun folgende Aussage:

Ist $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ eine kubische Gleichung mit rationalen Koeffizienten, dann besitzt sie entweder lauter rationale Lösungen oder keine Lösung ist konstruierbar.

Beweis:
Wenn die Gleichung keine rationalen Lösungen besitzt, jedoch eine konstruierbare Lösung y, dann gibt es wie vorhin einen kürzesten Weg $K_0 = Q, K_1, K_2 \ldots K_n$ so dass

$$y = a - b\sqrt{c}$$

in K_n liegt mit a, b und c in K_{n-1}, aber $\sqrt{c}$ nicht in K_{n-1}

Nun zeigt man mit genau derselben Begründung wie zuvor, dass dann auch

$$y = a + b\sqrt{c}$$

in K_n liegt. Mit dem Satz von Vieta ergibt sich mit der dritten Lösung x:

$$(a + b\sqrt{c}) + (a - b\sqrt{c}) + x = -p = 2a + x$$

womit aber die dritte Lösung $x = -p - 2a$ in K_{n-1} liegen müsste und damit insbesondere konstruierbar wäre. Das kann nicht sein, denn n ist die kürzeste Weglänge zu einer konstruierbaren Lösung.

Weiter benötigen wir folgende Aussage:

Ist $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ eine kubische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, dann sind die rationalen Lösungen ganzzahlig. Sind alle Lösungen rational, dann sind sie Teiler von r.

Ist nämlich $x = a/b$ eine rationale Lösung, dann können wir annehmen, dass der Bruch vollständig gekürzt ist. Durch Einsetzen ergibt sich

$$\frac{a^3}{b^3} + p\frac{a^2}{b^2} + q\frac{a}{b} + r = 0, \qquad also \qquad a^3 + pa^2b + qab^2 + rb^3 = 0$$

und damit

$$a^3 + b(pa^2 + qab + rb^2) = 0$$

Demzufolge ist b ein Teiler von a und damit muss b = 1 oder –1 sein und der Bruch ist demnach ganzzahlig.

Nun können wir weitere Beispiele anfügen.

Beispiel 2: Winkeldrittelung

Wir haben einen Winkel 3α gegeben und suchen konstruktiv den Winkel α. Ich behaupte, dass auch dieses Problem nicht allgemein lösbar ist. Die konstruktive Dreiteilung ist im allgemeinen nicht möglich.

Beweis:

Formen wir cos(3α) um, erhalten wir

$$\begin{aligned} &\cos(3\alpha) \\ &= \cos(2\alpha + \alpha) \\ &= \cos(2\alpha)\cos(\alpha) - \sin(2\alpha)\sin(\alpha) \\ &= (\cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2)\cos(\alpha) - 2\sin(\alpha)^2\cos(\alpha) \\ &= \cos(\alpha)^3 - 3\sin(\alpha)^2\cos(\alpha) \\ &= 4\cos(\alpha)^3 - 3\cos(\alpha) \end{aligned}$$

Setzen wir nun für α = 20° ein, dann ist 3a = 60°, also cos(3α) = ½. Setzt man ein, dann folgt mit x = cos(a)

$$4x^3 - 3x = \tfrac{1}{2} \quad \text{oder} \quad 8x^3 - 6x = 1$$

Setzen wir y = 2x, dann ergibt sich

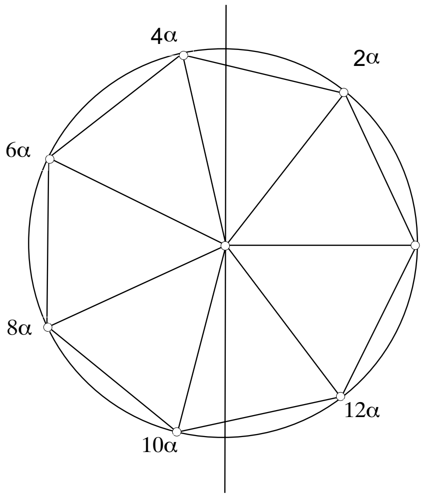
$$y^3 - 3y - 1 = 0$$

Diese Gleichung hat keine rationalen Lösungen (Sie müssten ja 1 oder –1 sein) und damit auch keine konstruierbaren Lösungen. Also ist der Winkel von 20° nicht konstruierbar und somit auch die Winkeldrittelung nicht allgemein möglich.

Beispiel 3: Reguläres Neuneck

Ein reguläres Neuneck kann man nicht konstruieren, denn das erfordert die Konstruktion des Winkels von 40°. Wäre dies möglich, könnte man auch den Winkel von 20 Grad konstruieren, indem man den von 40° halbiert.

Beispiel 4: Reguläres Siebeneck



$\alpha = \pi/7$

Wir setzen $\alpha = \pi/7$. Anhand der Figur erkennt man dann sofort, dass $\cos(2\alpha) = \cos(12\alpha)$, $\cos(4\alpha) = \cos(10\alpha)$ und $\cos(6\alpha) = \cos(8\alpha)$ ist.

Die Konstruierbarkeit des regulären Siebenecks bedeutet die Konstruierbarkeit der Grössen

$$\cos(\frac{2\pi}{7}) \quad \cos(\frac{4\pi}{7}) \quad \text{und} \quad \cos(\frac{6\pi}{7})$$

Wir behaupten, dass das nicht möglich ist.

Beweis: Wir benötigen dazu die Formel

$$\cos(\frac{2\pi}{7}) + \cos(\frac{4\pi}{7}) + \cos(\frac{6\pi}{7}) = -\frac{1}{2}$$

und ebenso das Additionstheorem.

$$2\cos(x)\cos(y) = \cos(x+y) - \cos(x-y)$$

Damit ergibt sich

$$\cos(\frac{2\pi}{7})\cos(\frac{4\pi}{7})\cos(\frac{6\pi}{7}) = \cos(\frac{2\pi}{7})\cos(\frac{10\pi}{7})\cos(\frac{6\pi}{7})$$
$$= \frac{1}{2}(\cos(\frac{8\pi}{7}) + \cos(\frac{12\pi}{7}))\cos(\frac{6\pi}{7})$$
$$= \frac{1}{4}(\cos(\frac{2\pi}{7}) + 1 + \cos(\frac{6\pi}{7}) + \cos(\frac{4\pi}{7}) = \frac{1}{8}$$

und

$$\cos(\frac{2\pi}{7})\cos(\frac{4\pi}{7}) + \cos(\frac{2\pi}{7})\cos(\frac{6\pi}{7}) + \cos(\frac{4\pi}{7})\cos(\frac{6\pi}{7})$$
$$= \frac{1}{2}(\cos(\frac{2\pi}{7}) + \cos(\frac{6\pi}{7}) + \cos(\frac{4\pi}{7}) + \cos(\frac{8\pi}{7}) + \cos(\frac{2\pi}{7}) + \cos(\frac{10\pi}{7}))$$
$$= \frac{1}{2}(\cos(\frac{2\pi}{7}) + \cos(\frac{6\pi}{7}) + \cos(\frac{4\pi}{7}) + \cos(\frac{6\pi}{7}) + \cos(\frac{2\pi}{7}) + \cos(\frac{4\pi}{7}))$$
$$= \frac{1}{2}(2(\cos(\frac{2\pi}{7}) + \cos(\frac{4\pi}{7}) + \cos(\frac{6\pi}{7})))$$
$$= -\frac{1}{2}$$

Damit sind gemäss dem Satz von Vieta die drei angegebenen Werte Lösungen der Gleichung

$$x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0$$

Setzt man für x = z/2 ein, erhält man

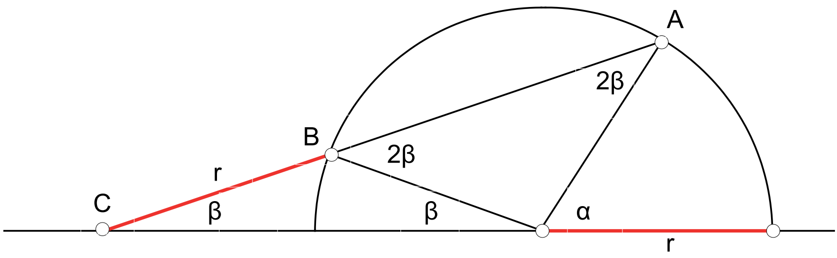
$$z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0$$

Das aber ist wieder eine Gleichung ohne konstruierbare Lösungen und damit ist das reguläre Siebeneck nicht konstruierbar.

Wichtig

Bei all diesen Problemen ist es sehr wichtig, dass man konstruieren wirklich im Sinne der von Maya beschriebenen Regeln K1 – K6 versteht und nicht Lineal oder Massstab in unerlaubter Weise verwendet.

Beispiel:



Man findet $\alpha + \beta = 4\beta$ und damit $\beta = \alpha/3$.

Hier wurde das Lineal in unerlaubter Weise verwendet, indem darauf zwei Punkte B und C markiert wurden, welche eine Strecke der Länge r bilden. Wird das Lineal dann in der angegebenen Weise an Punkt A angelegt, so entsteht ein Winkel β, der gleich einem Drittel von α ist.

Nadine Ammann

Konstruieren mit Zirkel und Lineal

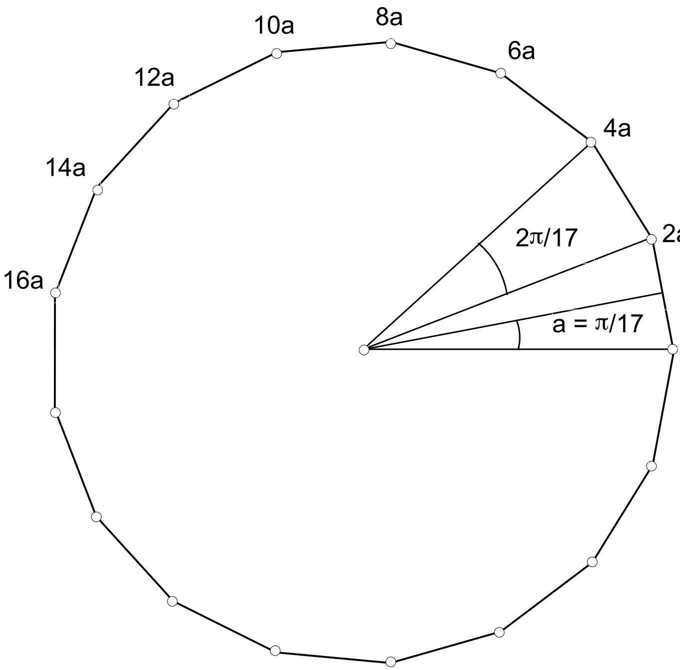
Die Konstruierbarkeit des regulären Siebzehnecks

Wie gezeigt wurde, sind das reguläre Sieben- und das Neuneck nicht konstruierbar. Sie teilen diese Eigenschaft mit einer grossen Zahl weiterer regulärer n-Ecke, von denen unten einige aufgeführt sind.

Überraschenderweise ist das reguläre Siebzehneck konstruierbar. Wir wollen uns überlegen, warum das so ist. Dabei geht es hier nur darum, die Existenz der Konstruktion zu beweisen und nicht darum, eine konkrete Konstruktion zu beschreiben. Eine solche kann in Wikipedia gefunden werden.

Im Anschluss an die Überlegungen zuvor halten wir zunächst fest:

Eine Zahl a ist genau dann konstruierbar wenn eine Folge $K_0 = Q$, K_1, K_2 ... K_n von Zahlkörpern existiert, so dass für alle Indizes m = 1,2 ... n der Körper K_m aus K_{m-1} durch Adjungierung einer Wurzel einer Zahl aus K_{m-1} entsteht, wobei diese Wurzel nicht in K_{m-1} liegt und a in K_n enthalten ist.



Wir setzen zur Vereinfachung der Darstellung

$$a = \frac{\pi}{17}$$

Es sei wie stets $K_0 = \mathbb{Q}$, also gleich dem Körper der rationalen Zahlen.

Im folgenden werden zunächst die wesentlichen Schritte der Konstruktion der Erweiterungskörper zusammengefasst. Danach folgen einige Erläuterungen zu Details.

Schritt 1: Von den Zahlen

$$u_1 = \cos(3a) + \cos(7a) + \cos(5a) + \cos(11a)$$
$$u_2 = \cos(9a) + \cos(13a) + \cos(15a) + \cos(a)$$

kann man zeigen, dass sie die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \frac{x}{2} - 1 = 0$$

mit rationalen Koeffizienten sind. Sie sind gleich

$$\frac{1+\sqrt{17}}{4} \qquad \frac{1-\sqrt{17}}{4}$$

Schritt 2: Nun setzen wir

$$x = \cos(3a) + \cos(5a) \qquad \xi = \cos(7a) + \cos(11a)$$
$$y = \cos(9a) + \cos(15a) \qquad \eta = \cos(13a) + \cos(a)$$

Wir zerlegen also obige beiden Summen in Teilsummen.

Dann kann man zeigen, dass x und ξ die Lösungen von

$$z^2 - u_1 z - \frac{1}{4} = 0$$

und y und η diejenigen von

$$z^2 - u_2 z - \frac{1}{4} = 0$$

sind. Da die Koeffizienten dieser Gleichungen in K_1 enthalten sind, liegen die Lösungen der ersten Gleichung in einem Körper K_2 und die der zweiten in einem Körper K_3 .

Schritt 3: Wir zerlegen nochmals und betrachten η = cos(13a) + cos(a).
Beachten wir die Formel

$$2\cos(ua)\cos(va) = \cos(u+v)a) + \cos((u-v)a)$$

dann finden wir

$$2\cos(13a)\cos(a) = \cos(14a) + \cos(12a) = \cos(\pi - 3a) + \cos(\pi - 5a)$$
$$= -\cos(3a) - \cos(5a) = -x$$

also

$$\cos(13a)\cos(a) = -\frac{x}{2}$$

Damit können wir den Satz von Vieta (er gilt für quadratische Gleichungen in entsprechender Weise wie für kubische Gleichungen) anwenden und finden, dass cos(a) und cos(13a) die Lösungen von

$$y^2 - \eta y - \frac{x}{2} = 0$$

sind. Die Koeffizienten dieser Gleichung sind in K_3 enthalten und demzufolge liegen die Lösungen, also insbesondere cos(a), in einem Erweiterungskörper K_4.

Als Resultat erhalten wir die Folge

K_0, K_1, K_2, K_3, K_4

und damit die Konstruierbarkeit des regulären Siebzehnecks. Die Zusammenfassung der Resultate liefert den vollständigen Ausdruck

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = \frac{1}{16}\left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{2(17-\sqrt{17})} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{2(17-\sqrt{17})} - 2\sqrt{2(17+\sqrt{17})}}\right)$$

Nun seien ein paar Bemerkungen zu den einzelnen Schritten angefügt.

Schritt 3 ist vollständig durchgeführt. Die verwendete Fomel

$$2\cos(ua)\cos(va) = \cos((u+v)a) + \cos((u-v)a)$$

ergibt sich aus den Additionstheoremen

$$\cos(p+q) = \cos(p)\cos(q) - \sin(p)\sin(q)$$
$$\cos(p-q) = \cos(p)\cos(q) + \sin(p)\sin(q)$$

mit $p = ua$ und $q = va$ durch Addition.

Die beiden ersten Schritte beruhen im wesentlichen auf derselben Idee, also ebenfalls auf dem Satz von Vieta. Schauen wir Schritt 2 an.

Wir erkennen sofort, dass $x + \xi = u_1$. Weiter ergibt sich unter Verwendung der beschriebenen Cosinus-Regel

$$\begin{aligned}2x\xi &= 2(\cos(3a) + \cos(5a))(\cos(7a) + \cos(11a)) \\ &= 2(\cos(3a)\cos(7a) + \cos(3a)\cos(11a) + \cos(5a)\cos(7a) + \cos(5a)\cos(11a)) \\ &= \cos(10a) + \cos(4a) + \cos(14a) + \cos(8a) + \cos(2a) + \cos(12a) + \cos(6a) + \cos(16a)\end{aligned}$$

Man erkennt, dass letztlich Summen zu bestimmen sind, wie sie bereits bei früheren Überlegungen aufgetreten sind.

Man kann zeigen, was hier nicht im Detail durchgeführt werden kann, dass

$$\cos(a) + \cos(3a) + \cos(5a) + \ldots + \cos(15a) = \frac{1}{2}$$

und

$$\cos(2a) + \cos(4a) + \cos(6a) + \ldots + \cos(16a) = -\frac{1}{2}$$

Damit wird dann $x\xi = -1/4$ und mit dem Satz von Vieta ergibt sich, dass x und ξ Lösungen von

$$z^2 - u_1 z - \frac{1}{4} = 0$$

sind.

Aber auch Schritt 1 basiert auf dieser Idee. Aus den oben zitierten Formeln findet man sofort

$$u_1 + u_2 = \frac{1}{2}$$

Bei der Bildung des Produktes $2u_1u_2$ erhalten wir lauter Produkte der Form

$$2\cos(ua)\cos(va)$$

die wir wieder nach der mehrfach verwendeten Regel umformen. Dabei treten die Werte

$$\cos(2a),\ \cos(4a),\ \cos(6a), \ldots, \cos(16a)$$

alle genau viermal auf und die Summe ist damit gleich –2. Damit wird

$$u_1 u_2 = -1$$

Nun ergibt sich auch die erste quadratische Gleichung ebenfalls wieder aus dem Satz von Vieta.

Carl Friederich Gauss (1777 – 1855) beschäftigte sich bereits 1795 im ersten Semester seines Studiums mit dem Kreisteilungsproblem. Die entscheidende Entdeckung der Konstruierbarkeit des regulären Siebzehnecks gelang ihm am 29. März 1796, wenige Wochen vor seinem neunzehnten Geburtstag. Er lieferte damit die erste nennenswerte Ergänzung euklidischer Konstruktionen seit 2000 Jahren. Dies war allerdings nur ein Nebenergebnis bei der Arbeit für sein zahlentheoretisch viel weiterreichendes Werk *Disquisitiones Arithmeticae*.

Im Jahre 1825 veröffentlichte Johannes Erchinger erstmals eine Konstruktionsanleitung für das regelmäßige Siebzehneck in 64 Schritten. Eine animierte Darstellung dieser Konstruktion findet man in Wikipedia.

Mit der im Vortrag beschriebenen Methode kann grundsätzlich auch die Konstruierbarkeit regulärer n-Ecke mit höherer Eckenzahl untersucht werden. Welche wirklich konstruierbar sind, bewies C.F. Gauss in den erwähnten Arbeiten aufgrund allgemeiner zahlentheoretischer Überlegungen.

Das reguläre n-Eck ist genau dann konstruierbar, wenn die ungeraden Primfaktoren von n alle in der ersten Potenz vorkommen und von der Form $2^m + 1$ sind.

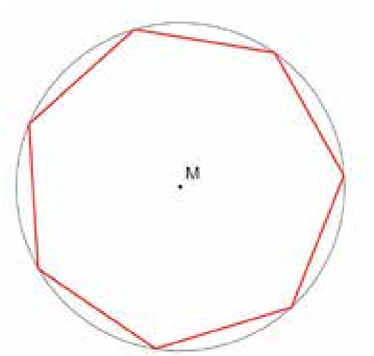
Was für Primfaktoren sind das? Für m = 1 erhält man 3, für m = 2 die Zahl 5. Die entsprechenden Vielecke sind konstruierbar. Für m = 3 ergibt sich 9, also das Quadrat der Primzahl 3, womit das 9-Eck nicht konstruierbar ist. Für m = 4 erhält man das besprochene Siebzehneck. Damit $2^m + 1$ eine Primzahl ist, muss m eine Potenz von 2 sein. Nicht alle solchen Zahlen aber sind Primzahlen.

Man erhält folgende Reihe der Zahlen $n = 2^m + 1$, in denen die konstruierbaren Fälle rot markiert sind.

3, 5, 9, 17, 33, 65, 129, 257, 513, 1025, 2049, 4097, 8193, 16385, 32769, 65537, ...

Isabel Rüttimann

Konstruieren mit Zirkel und Lineal
Näherungskonstruktionen für das reguläre Siebeneck



Das reguläre Siebeneck

-besteht aus sieben gleich langen Seiten
-seine sieben Eckpunkte liegen auf einem Kreis, dem Umkreis

-wird auch Heptagon genannt

Im Alltag begegnet man dem regelmässigen Siebeneck ab und zu auf Münzen

Die älteste Münze, die in Verbindung mit diesem Polygon steht, ist die spanische 200-Peseten-Münze, welche ein Siebeneck eingeprägt hat.

Die englische 50-Pence-Münze hat eine siebeneckige Form und die

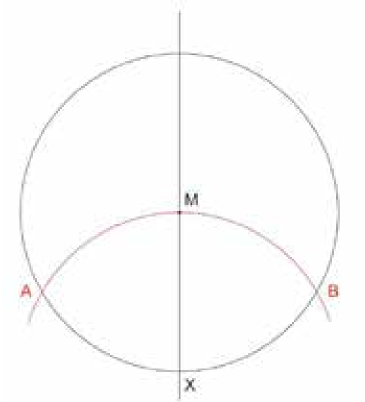
20-Cent-Münze des Euros hat sieben regelmässig verteilte Einkerbungen.

In der Architektur begegnet man dem Siebeneck eher selten.

Ein bekanntes Beispiel ist der Hegelsaal. Dieser ist ein Konzertsaal im Kultur- und Kongresszentrum Liederhalle in Stuttgart. Die siebeneckige (allerdings nicht reguläre) Form wurde aufgrund der optimalen Akustik gewählt.

Der Grund warum regelmässige Siebenecke so selten sind, liegt vielleicht gerade darin, dass man sie mit Zirkel und Lineal nicht exakt konstruieren kann, wie in den Arbeiten zuvor gezeigt wurde. Eine Lösung für dieses Problem bieten

Näherungskonstruktionen

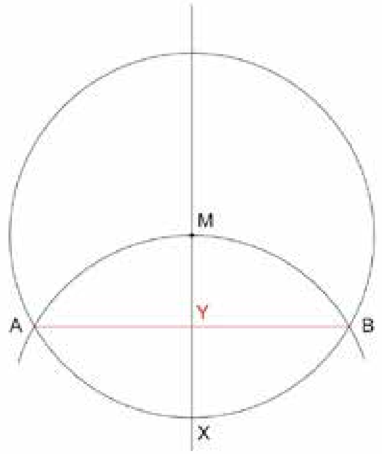


Eine einfache Näherungskonstruktion für das regelmässige Siebeneck beginnt mit dem Umkreis.

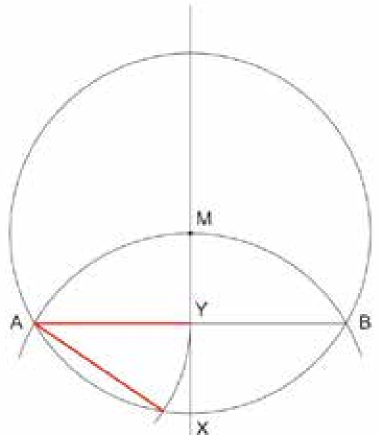
Mit einer Senkrechten durch den Mittelpunkt wird der Kreis in zwei gleiche Hälften geteilt.

Der Schnittpunkt der Geraden mit dem Kreis wird als Punkt X bezeichnet.

Mit dem Zirkel steckt man nun an diesem Punkt ein und schlägt einen Bogen durch den Mittelpunkt des Kreises.

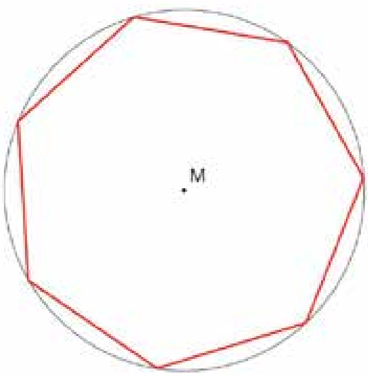


Die Schnittpunkte des Bogens mit dem Kreis bezeichnet man als A und B. Nun verbindet man die Punkte A und B mit einer Geraden und erhält so den Schnittpunkt Y.

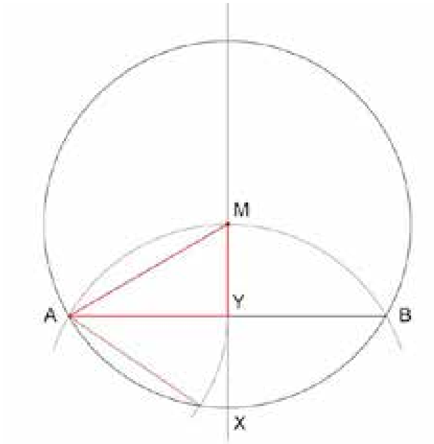


Die Strecke AY ist angenähert gleich der Seite des regulären Siebenecks.

Nimmt man sie in den Zirkel und trägt sie, von A ausgehend rundum auf dem Umkreis ab, so erhält man mit ansprechender Genauigkeit ein regelmässiges Siebeneck.



Doch wie genau oder ungenau ist nun diese Näherungskonstruktion? Dazu betrachtet man das rechtwinklige Dreieck AYM. Die angenäherte Siebeneckseite berechnet sich wie folgt:



$$AY = \sqrt{MA^2 - MY^2}$$

MA = Radius r
MY = Hälfte Radius = $\frac{1}{2}$r
AY = Siebeneckseite s

$$s = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{2}r\right)^2}$$
$$s = r \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$s = r \cdot 0.866025404$$

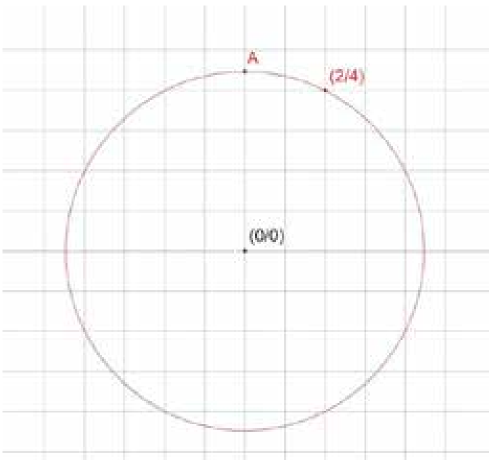
Für eine exakte Konstruktion müsste die Siebeneckseite aber so berechnet werden:

$$s = 2 \cdot r \cdot \sin\frac{180}{7}$$
$$s = r \cdot 0.867767478$$

Daraus ergibt sich bei dieser Näherungskonstruktion ein relativer Fehler von:

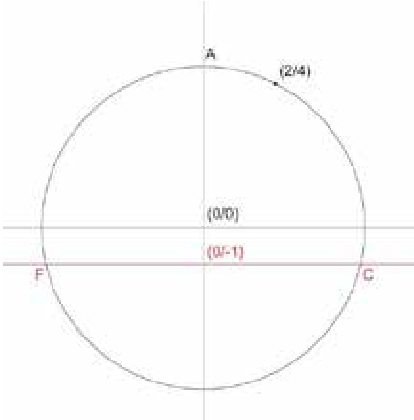
0.867767478 – 0.866025404 = 0.002

Die Siebeneckseite der Näherungskonstruktion ist also etwas zu gross.



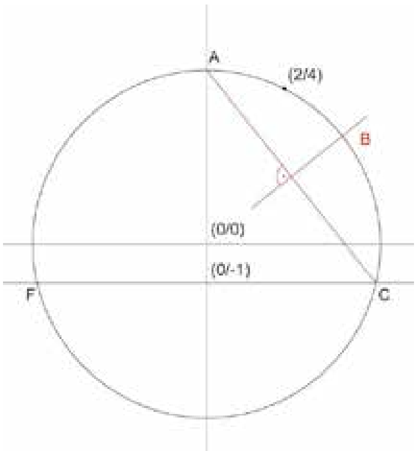
Eine zweite, verblüffend genaue, Näherungskonstruktion beginnt mit einem leeren Koordinatennetz mit Mittelpunkt (0/0).

In diesem Koordinatennetz trägt man nun den Punkt (2/4) ein und zeichnet einen Kreis mit Mittelpunkt (0/0) durch diesen Punkt.



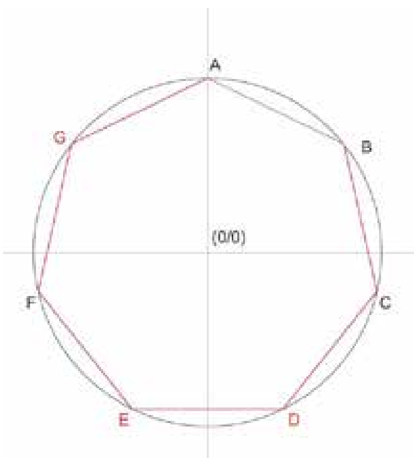
Der Schnittpunkt des Kreises mit der Y-Achse ist die erste Ecke des Siebenecks (A).

Zwei weitere Ecken (C, F) ergeben sich, wenn man die X-Achse parallel um -1 verschiebt. Diese Schnittpunkte werden mit C und F bezeichnet.



Nun verbindet man die Punkte A und C mit einer Geraden, konstruiert die Mittelsenkrechte und erhält einen neuen Schnittpunkt mit dem Kreis. Dies ist eine weitere Ecke B des Siebenecks.

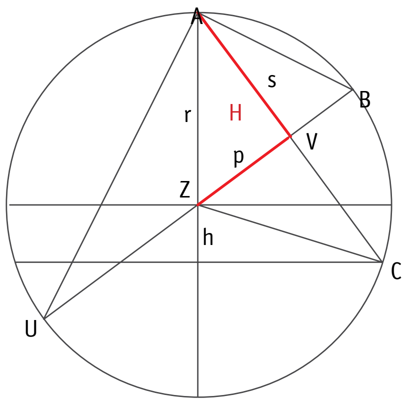
Mit AB ist die angenäherte Seite des regulären Siebenecks gegeben.



Analog kann man mit den Ecken A und F vorgehen und erhält so die Ecke G.

Oder aber man trägt einfach die angenäherte Siebenecksseite AB auf dem Umkreis ab. So erhält man auch D und E.

Auch hier stellt sich wieder die Frage nach der Genauigkeit der Näherung. Für diese Berechnung betrachtet man wieder rechtwinklige Dreiecke gemäss folgender Figur.



Zuerst findet man im Dreieck AZC

$$H^2 = \frac{1}{4}\left|AC\right|^2 = \frac{1}{4}((r+h)^2 + r^2 - h^2) = \frac{1}{4}(2r^2 + 2rh)$$

Mit dem Dreieck ZVA ergibt sich

$$p^2 = r^2 - H^2 = r^2 - \frac{1}{4}(2r^2 + 2rh) = \frac{r^2}{2}(1 - \frac{h}{r})$$

Mit dem Kathetensatz, angewendet auf UBA folgt

$$s^2 = 2r(r-p) = 2r^2 - 2rp = 2r^2 - \frac{2r^2}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{h}{r}} = r^2(2 - \sqrt{2}\sqrt{1-\frac{h}{r}})$$

und damit schliesslich die Seite s des Siebenecks

$$s = r\sqrt{2 - \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{h}{r}}}$$

Nun kann wieder der relative Fehler berechnet werden.

0.867767478 – 0.868269254 = –0.0005

Die Seite der Näherungskonstruktion ist also ein kleines bisschen zu klein.

Helen Büchi

carte blanche

Idee dieser Schriftenreihe ist, persönliche Vorlieben von Mitarbeitern der Bauschule einem engeren und weiteren Publikum bekannt zu machen. Die Verantwortlichen publizieren im Rahmen einer vorgegebenen Struktur ihre Beiträge. 12 Exemplare werden als Farbkopien ausgedruckt, zwei gehen in die Bibliothek, die übrigen werden signiert und verteilt. Die Dokumentation wird dann als pdf-Datei auf dem Server öffentlich zugänglich gemacht. c.b. erscheint 4-mal im Jahr.

c.b. 1: Interieurs – Skizzen von Stephan Mäder, Januar 2007
c.b. 2: ... da und dort – Fotos von Stephan Mäder, Juli 2007
c.b. 3: Aquarium, Einbau in der Halle 180, Oktober 2007
c.b. 4: Exterieurs – Skizzen von Stephan Mäder, Dezember 2007
c.b. 5: Master of Arts ZFH in Architektur, Januar 2008
c.b. 6: Druckgraphiken – Abzüge in Ätzverfahren von Stephan Mäder, April 2008
c.b. 7: Neues aus Berlin – Studentenarbeiten und Bilder aus dem Jahr 2007, Juni 2008
c.b. 8: Halle 180 – Architekturschule in einer Industriehalle, Oktober 2008
c.b. 9: alte Sachen – Stephan Mäder, März 2009
c.b. 10: entsorgte Modelle – Mäder + Mächler, Juli 2009
c.b. 11: Vorträge „Blauer Montag – Hubert Mäder
c.b. 12: aus einem Weissbuch – Stephan Mäder, November 2009
c.b. 13: Libro Nero – Meine Skizzen zu Vorlesungen im Entwurfsunterricht – Peter Quarella, Januar 2010
c.b. 14: BCN–Alongside Pere IV – 54 Students–4 Teachers–16 Weeks–Summer 2009, Februar 2010
c.b. 15: Extra muros, Bilder von Studienreisen – Stephan Mäder, Juni 2010
c.b. 16: Köln–Nordrhein-Westfalen, Dozentenreise 2010 – Toni Winiger, September 2010
c.b. 17: Chioggia–Isola dei Cantieri, Das Wesen des Wohnens, Januar 2011
c.b. 18: Kvarner Bucht, Kroatien – Stephan Mäder, März 2011
c.b. 19: Transformation – Paul Bürki, November 2011
c.b. 20: Sofia, Bulgarien – Peter Jenni, Dezember 2011
c.b. 21: Japan, Studienreise der HSZ–T – Rudolf Moser, März 2012
c.b. 22: 13’ manthan [west] – Beat Consoni, Juli 2012
c.b. 23: Lange Häuser, 25 lange und ein hohes – Stephan Mäder, Oktober 2012
c.b. 24 a/b: Konstruiert?/ Mathematik verbindet, Doppelnummer – Karl Weber/Martin Huber, Dezember 2012

c.b.24|weba

Impressum

Herausgeber:	ZHAW Departement Architektur, Gestaltung und Bauingenieurwesen
Redaktion:	Text, Pläne und Fotos Karl Weber, Studierende ZHAW
Grafische Aufarbeitung:	Toni Winiger
Druck:	CLC, Auflage: 12 Exemplare
Publikation:	pdf-Datei auf server: www.archbau.zhaw.ch
Ausgabe:	Nr. 24 a - Dezember 2012